

# **DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE**

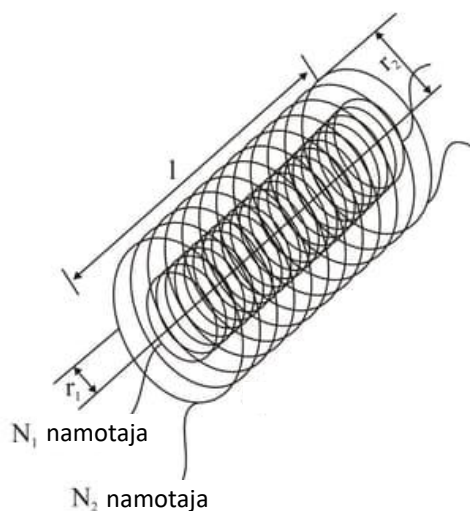
## **3. SKUPINA ZADATAKA**

**ŠKOLSKA GODINA 2025./2026.**

**Zadatak 1. (16 bodova)**

Dva idealna solenoida duljine 2 metra nalaze se koncentrično jedan u drugome (koaksijalno – vidi sliku). Vanjski je solenoid polumjera 10 cm i sastoji se od 400 namotaja po metru duljine. Unutarnji je solenoid polumjera 5 cm i sastoji se od 600 namotaja po metru duljine. Dva solenoida spojena su serijski. Zanimajte rubne efekte i magnetsko polje izvan solenoida.

- Odredite induktivitet svakog solenoida pojedinačno.
- Odredite ukupni induktivitet dvaju solenoida ako se magnetski tokovi međusobno pojačavaju.
- Ako kroz solenoide teče struja 10 A, odredite inducirani elektromotorni napon na krajevima dvaju serijski spojenih koaksijalnih solenoida ako je struja prestala teći nakon 10 ms pri isključenju sklopke. Struja se pri tome linearno smanjuje. Struja u oba solenoida teče u istom smjeru.

**Rješenje:**

Označimo vanjski solenoid indeksom '2', a unutarnji solenoid indeksom '1'. Broj namotaja  $N$  solenoida možemo odrediti iz broja namotaja  $n$  po jedinici duljine i duljine solenoida  $l$  kao:

$$n = \frac{N}{l} \rightarrow N = n \cdot l \quad 1 \text{ bod}$$

- a) Induktivitet vanjskog solenoida iznosi:

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A_2}{l} = \mu_0 \frac{n_2^2 \cdot l^2 \cdot r_2^2 \pi}{l} = \mu_0 \cdot n_2^2 \cdot l \cdot r_2^2 \pi = 1.263 \cdot 10^{-2} \text{ H} = 12.63 \text{ mH} \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je  $A_2 = r_2^2 \pi$  površina poprečnog (kružnog) presjeka vanjskog solenoida polumjera  $r_2$ . Analogno dobijemo i za unutarnji solenoid:

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A_1}{l} = \mu_0 \frac{n_1^2 \cdot l^2 \cdot r_1^2 \pi}{l} = \mu_0 \cdot n_1^2 \cdot l \cdot r_1^2 \pi = 7.106 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 7.106 \text{ mH} \quad 1 \text{ bod}$$

**NAPOMENA:** Ako učenik ne zna izraz za induktivitet solenoida, može ga izvesti, ali to mu se ne boduje:

Tok magnetskog polja kroz zatvorenu petlju proporcionalan je struji kroz petlju, s faktorom proporcionalnosti jednakim induktivitetu:

$$\Phi = L \cdot I$$

Magnetski tok kroz površinu presjeka  $A$  solenoida s  $N$  namotaja i magnetskim poljem  $B$  iznosi:

$$\Phi = NBA$$

Magnetsko polje u unutrašnjosti solenoida duljine  $l$  s  $N$  namotaja koje nastaje protokom struje  $I$  kroz solenoid:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

Iskoristimo sve tri jednačbe:

$$LI = N \cdot \mu_0 \frac{NI}{l} \cdot A$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

b) Za određivanje ukupnog induktiviteta potrebno je primijetiti da su dva solenoida spojena serijski, pa se njihov induktivitet zbraja, ali treba još odrediti i međui induktivitet kao posljedicu promjene magnetskog polja unutar vanjskog solenoida zbog utjecaja unutarnjeg, i obrnuto.

Serijski spoj dvaju solenoida daje serijski induktivitet  $L_s$ :

$$L_s = L_1 + L_2 \quad 1 \text{ bod}$$

Potrebno je još dodati međui induktivitete  $M_{12}$  i  $M_{21}$  međudjelovanja dviju zavojnica: ili

$$L_{uk} = L_s + M_{12} + M_{21} = L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21} \quad 2 \text{ boda}$$

**NAPOMENA:** Ako učenik ne uzme u obzir međui induktivitet, treba bodovati samo relaciju za serijski spoj  $L_s$

Prolaskom struje  $I_2$  kroz vanjski solenoid (2), stvara se magnetsko polje i magnetski tok  $\Phi_1$  kroz unutarnji solenoid (1), s međui induktivitetom  $M_{12}$  solenoida 1 u odnosu na solenoid 2:

$$\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2 \quad 1 \text{ bod}$$

Magnetski tok kroz unutarnji solenoid (1) zbog magnetskog polja vanjskog solenoida (2) iznosi:

$$\Phi_1 = N_1 B_2 A_1 \quad 1 \text{ bod}$$

dok je magnetsko polje  $B_2$  uslijed struje  $I_2$  u vanjskom solenoidu (2) jednako:

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{l} \quad 1 \text{ bod}$$

Kombinacijom triju gornjih jednačbi dobijemo:

$$M_{12} \cdot I_2 = N_1 B_2 A_1 = N_1 \cdot \mu_0 \frac{N_2 I_2}{l} \cdot A_1$$

Konačno za međui indukciju dobijemo:

$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} = \mu_0 \frac{n_1 l \cdot n_2 l \cdot r_1^2 \pi}{l} = \mu_0 n_1 n_2 l \cdot r_1^2 \pi \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno moramo još izračunati utjecaj unutarnjeg solenoida (1) na vanjski solenoid (2) kroz međuinduktivitet  $M_{21}$ . Moguće je vidjeti da se svi indeksi zamjenjuju, osim površine  $A_1$  kroz koju unutarnji solenoid stvara magnetsko polje i utječe na vanjski solenoid jer pretpostavljamo da je magnetsko polje izvan unutarnjeg solenoida jednako nuli. 1 bod

Dakle, prolaskom struje  $I_1$  kroz unutarnji solenoid (1) stvara se magnetsko polje i magnetski tok  $\Phi_2$  kroz vanjski solenoid (2), s međuinduktivitetom  $M_{21}$  solenoida 2 u odnosu na solenoid 1:

$$\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$$

Magnetski tok kroz vanjski solenoid (2), zbog magnetskog polja unutarnjeg solenoida (1), ograničen je samo na poprečni presjek  $A_1$  unutarnjeg solenoida i iznosi:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A_1 \quad 1 \text{ bod}$$

dok je magnetsko polje  $B_1$  uslijed struje  $I_1$  u unutarnjem solenoidu (1) jednako:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$$

Kombinacijom triju gornjih jednadžbe dobijemo:

$$M_{21} \cdot I_1 = N_2 B_1 A_1 = N_2 \cdot \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} \cdot A_1$$

Konačno, za međuindukciju dobijemo:

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{l} = M_{12} \quad 2 \text{ boda}$$

Sada možemo izračunati ukupni induktivitet:

$$L_{uk} = L_s + 2M_{12} = L_1 + L_2 + 2M_{12}$$

$$L_{uk} = 12.63 \text{ mH} + 7.106 \text{ mH} + 9.475 \text{ mH} = 29.211 \text{ mH} \quad 1 \text{ bod}$$

c) Promjena struje u vremenu iznosi:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{10}{0.01} \text{ As}^{-1} = 1000 \text{ As}^{-1} \quad 1 \text{ bod}$$

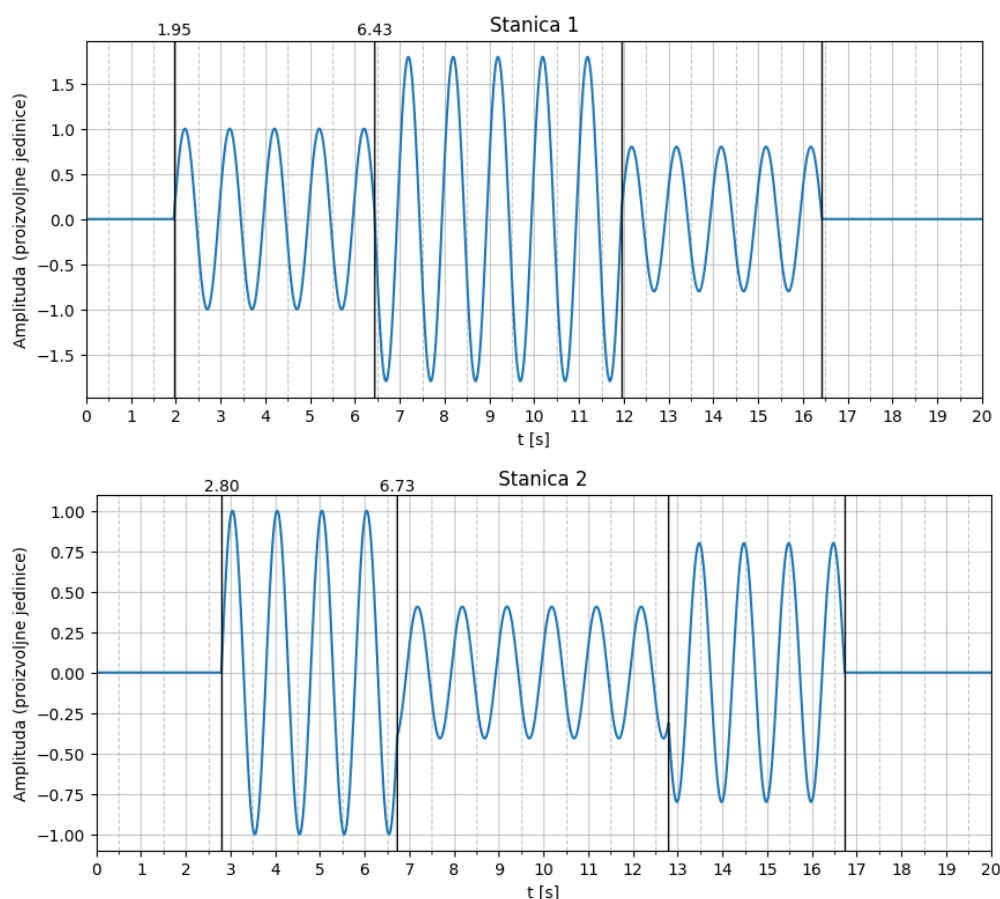
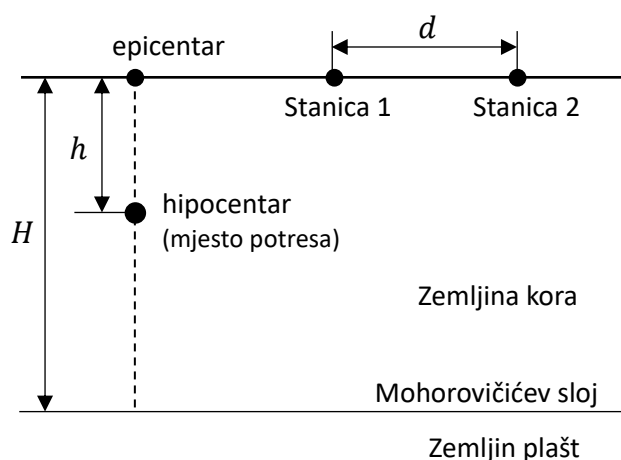
Inducirani elektromotorni napon na krajevima obaju solenoida u serijskom spoju iznosi (zanemarimo predznak):

$$\mathcal{E} = L_{uk} \frac{\Delta I}{\Delta t} = 29.21 \text{ V} \quad 1 \text{ bod}$$

## Zadatak 2. (19 bodova)

Geofizičari seizmolozi opazili su potresne valove u seizmološkim stanicama 1 i 2 (vidi slike) uzrokovane potresom na nepoznatoj dubini  $h$  s obzirom na površinu Zemlje. Pretpostavite da je potres nastao u jednoj točki (hipocentar) u unutrašnjosti Zemlje i da se širi u svim smjerovima u obliku ravnih harmonijskih potresnih valova. Točka na površini Zemlje koja je najmanje udaljena od hipocentra (mjesto nastanka potresa) naziva se epicentar. Obje seizmološke stanice nalaze se na istom pravcu koji prolazi kroz epicentar. Međusobna udaljenost dviju seizmoloških stanica iznosi  $d = 8$  km. Seizmolozi su izmjerili valnu duljinu potresnih valova od 8 km. Valovi se šire kroz Zemljinu koru homogene gustoće, bez gubitaka i prigušenja, sve dok ne dosegnu površinu Zemlje. Na dnu kore nalazi se Mohorovičićev sloj, granica ispod koje se nalazi Zemljin plašt čija je gustoća mnogo veća od Zemljine kore. Mjerenja prikazana na slikama započinju u trenutku potresa ( $t = 0$ ).

- Odredite dubinu  $h$  potresa, trajanje potresa i dubinu  $H$  Mohorovičićeva sloja.
- Odredite udaljenost seizmoloških postaja 1 i 2 od epicentra potresa.
- Odredite koliki je dio energije vala apsorbiran u Mohorovičićevu sloju pri refleksiji.



**Napomena:** Vertikalnim punim linijama označeni su trenutci promjene oblika vala na slikama, s pripadnim vremenima na vrhu grafova.

**Rješenje:**

Iz izvora potresa (hipocentar) u svim se smjerovima širi ravni harmonijski potresni val amplitude  $u_0$  i oblika:

$$u(t) = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right)$$

Kružna frekvencija iznosi:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Period vala možemo očitati sa slike:

$$T = 1 \text{ s} \quad 0.5 \text{ bod}$$

Amplitudu direktnog vala također možemo očitati sa slike (proizvoljne jedinice):

$$u_0 = 1 \quad 0.5 \text{ bod}$$

Brzina širenja potresnih valova iznosi:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = 8 \text{ km/s} \quad 1 \text{ bod}$$

a) i b)

S obzirom da Zemljina kora ima mnogo veću gustoću od Zemljina plašta, na granici kore i plašta (Mohorovičićev diskontinuitet) doći će do refleksije potresnog vala. Na površini Zemlje, u stanicama 1 i 2 imat ćemo interferenciju direktnog i reflektiranog vala. Reflektirani val također će promijeniti fazu za  $\pi$ .

Poznavanjem trenutka dolaska direktnog vala ( $t_{d1}$  i  $t_{d2}$ ) u stanice 1 i 2 (očitalo s grafova), možemo odrediti udaljenost stanica 1 i 2 do hipocentra, pri čemu su  $x_1$  i  $x_2$  udaljenosti stanica 1 i 2 od epicentra:

$$\begin{aligned} (vt_{d1})^2 &= h^2 + x_1^2 \\ (vt_{d2})^2 &= h^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

S grafova možemo očitati i trenutak ( $t_{r1}$  i  $t_{r2}$ ) dolaska reflektiranog vala, pri čemu dolazi do interferencije i promjene oblika sinusoidalnog vala. Primijetimo da je početak reflektiranog vala u protufazi (smanjuje amplitudu direktnog vala).

Prema zakonu refleksije, upadni i izlazni kutovi smjera vala jednaki su u slučaju stanice 1, pa možemo val 1 'reflektirati' s obzirom na granicu (vidi donju sliku):

$$\begin{aligned} (vt_{r1})^2 &= (h + H - h + H - h)^2 + x_1^2 \\ (vt_{r1})^2 &= (2H - h)^2 + x_1^2 \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno za stanicu 2:

$$(vt_{r2})^2 = (2H - h)^2 + x_2^2$$

Iz direktnih valova možemo odrediti  $x_1$ ,  $x_2$  i  $h$ :

$$\begin{aligned} (vt_{d1})^2 &= h^2 + x_1^2 \\ (vt_{d2})^2 &= h^2 + x_2^2 \\ x_2 &= x_1 + d \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Oduzmimo i zamijenimo  $x_2$ :

$$\begin{aligned} v^2(t_{d1}^2 - t_{d2}^2) &= x_1^2 - (x_1 + d)^2 \\ v^2(t_{d2}^2 - t_{d1}^2) &= 2x_1d + d^2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{v^2(t_{d2}^2 - t_{d1}^2) - d^2}{2d}$$

S grafa očitamo vrijeme dolaska direktnog vala u stanicu 1 i 2:

$$t_{d1} = 1.95 \text{ s}$$

$$t_{d2} = 2.80 \text{ s}$$

1 bod

Uvrstimo i dobijemo:

$$x_1 = 12.15 \text{ km}$$

$$x_2 = x_1 + d = 20.15 \text{ km}$$

1 bod

Dubina potresa:

$$h^2 = (vt_{d1})^2 - x_1^2$$

$$h = 9.785 \text{ km}$$

1 bod

Iz reflektiranog vala:

$$(vt_{r1})^2 = (2H - h)^2 + x_1^2$$

Odredimo  $H$ :

$$2H - h = \sqrt{(vt_{r1})^2 - x_1^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \left( h + \sqrt{(vt_{r1})^2 - x_1^2} \right)$$

1 bod

Očitamo vremena  $t_{r1}$  i  $t_{r2}$  dolaska reflektiranog vala:

$$t_{r1} = 6.43 \text{ s}$$

$$t_{r2} = 6.73 \text{ s}$$

1 bod

Dobijemo:

$$H = 29.885 \text{ km}$$

1 bod

Sa slike se može odrediti da potres traje 10 sekundi.

2 boda

c)

Sa slike je vidljivo da je amplituda direktnog potresnog vala:

$$u_{d0} = 1$$

Nakon što reflektirani val pristigne u seizmološku stanicu, amplituda se mijenja ovisno o relativnoj fazi između dvaju valova, no na kraju grafičkog prikaza direktni val nestaje i preostaje samo reflektirani val. Amplituda reflektiranog vala prema slici iznosi:

$$u_{r0} = 0.8$$

1 bod

Energija vala proporcionalna je kvadratu amplitude vala, pa je energija reflektiranog vala u odnosu na energiju direktnog vala:

$$\frac{E_r}{E_d} = \left( \frac{u_{r0}}{u_{d0}} \right)^2 = 0.64$$

2 boda

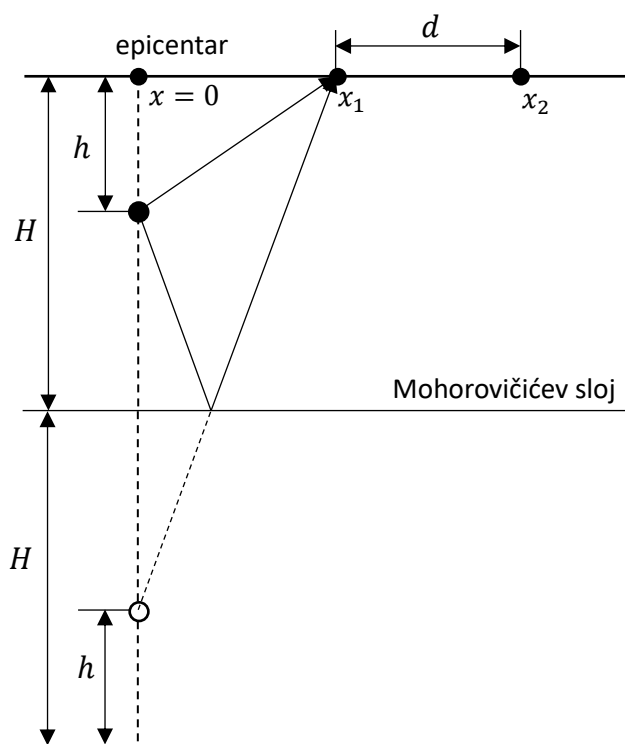
Mohorovičićev je sloj prema tome apsorbirao

$$\frac{E_d - E_r}{E_d} = 1 - \frac{E_r}{E_d} = 0.36$$

$$\Delta E = E_d - E_r = 0.36 E_d$$

1 bod

energije direktnog vala.





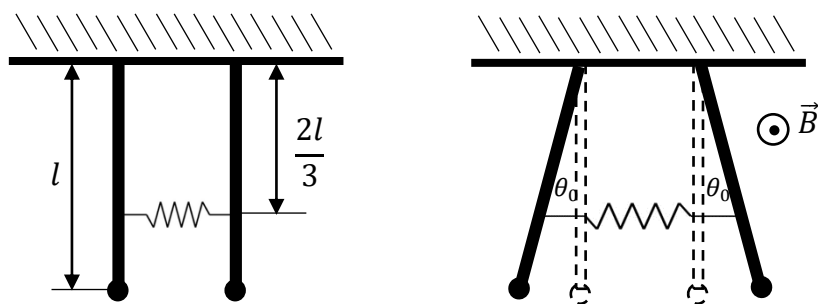
**Zadatak 3. (19 bodova)**

Dva jednaka vodljiva štapa duljine  $l = 40$  cm i mase  $m = 300$  g svaki, obješena su svaki na svoje ovjesište i međusobno spojeni vodljivom ravnom nerastegnutom oprugom koeficijenta elastičnosti  $k = 90$  N/m. Krajevi opruge pričvršćeni su za štap na udaljenosti  $2/3$  duljine štapa od ovjesišta. Na kraju svakog štapa pričvršćen je mali uteg zanemarivih dimenzija i mase  $M = 500$  g.

- a) Odredite period njihanja štapova ako oba štapa istovremeno otklonimo za mali kut  $\theta_0$  od ravnotežnog položaja tako da rastegnemo oprugu u oba smjera (vidi sliku) te pustimo da titra. Zanemarite debljinu štapova i opruge, masu opruge i otpor zraka. Pretpostavite male otklone za koje vrijedi (kut  $\theta$  mjeri se u radijanima):

$$\sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1$$

- b) Ako se ovakvo njihalo nalazi u magnetskom polju  $B = 1$  T okomitom na ravninu njihala, a vrhove vodljivih štapova u ovjesištu spojimo horizontalnom vodljivom žicom, odredite najveću induciranu struju u štapu ako je ukupni otpor zatvorenog strujnog kruga  $2 \Omega$ , a štapove smo maksimalno otklonili za  $\theta_0 = 10^\circ$ . Pretpostavite da je inducirana struja preslaba da utječe na gibanje sustava.

**Rješenje:**

- a) Pomaknimo štapove za neki kut  $\theta$  od ravnotežnog položaja. Ucrtajmo sve sile koje djeluju na štap (vidi sliku):

1. Sila teža u središtu štapa:

$$G_m = mg \quad 0.5 \text{ boda}$$

2. Sila teža u središtu utega:

$$G_M = Mg \quad 0.5 \text{ boda}$$

3. Elastična sila opruge koja se rastegnula ukupno za  $\Delta x$  (zanemarujemo predznak):

$$F_{el} = k\Delta x \quad 0.5 \text{ boda}$$

Opruga se jednako rasteže pri pomaku lijevog, ali i pri pomaku desnog štapa. Ukupni je pomak jednak:

$$\Delta x = 2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \sin \theta \approx 2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \theta$$

Elastična sila sada iznosi:

$$F_{el} = \frac{4}{3} kl\theta \quad 1 \text{ bod}$$

Odredimo momente sile koji uzrokuju gibanje, odnosno rotaciju štapa i utega oko ovjesišta:

1. Moment sile teže štapa:

$$M_m = mg \sin \theta \cdot \frac{l}{2} \approx \frac{mgl}{2} \theta \quad 1 \text{ bod}$$

2. Moment sile teže utega:

$$M_M = Mg \sin \theta \cdot l \approx Mgl \theta \quad 1 \text{ bod}$$

3. Moment sile elastičnosti:

$$M_{el} = \frac{4}{3} kl \theta \cos \theta \cdot \frac{2}{3} l \approx \frac{4}{3} kl \theta \cdot \frac{2}{3} l = \frac{8}{9} kl^2 \theta \quad 1 \text{ bod}$$

Svi momenti zakreću desni štap u smjeru kazaljke na satu, pa je ukupni moment:

$$M = M_m + M_M + M_{el} = \frac{mgl}{2} \theta + Mgl \theta + \frac{8}{9} kl^2 \theta$$

$$M = \left[ gl \left( \frac{m}{2} + M \right) + \frac{8}{9} kl^2 \right] \theta \quad 1 \text{ bod}$$

Jednadžba gibanja:

$$M = I \alpha$$

gdje je  $I$  ukupni moment inercije štapa i utega, a  $\alpha$  je kružno ubrzanje štapa oko ovjesišta. Konačno:

$$I \alpha = \left[ gl \left( \frac{m}{2} + M \right) + \frac{8}{9} kl^2 \right] \theta \quad 1 \text{ bod}$$

Ovo je jednadžba harmonijskog oscilatora oblika:

$$\alpha = \omega^2 \theta$$

Kružna frekvencija stoga je:

$$\omega^2 = \frac{gl \left( \frac{m}{2} + M \right) + \frac{8}{9} kl^2}{I}$$

Period iznosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{gl \left( \frac{m}{2} + M \right) + \frac{8}{9} kl^2}} \quad 2 \text{ boda}$$

Moment inercije štapa pri rotaciji oko jednog njegova kraja iznosi:

$$I_s = \frac{1}{3} ml^2$$

Moment inercije utega kao točkaste mase (bez dimenzija) oko ovjesišta na udaljenosti  $l$  iznosi:

$$I_u = Ml^2$$

Ukupni moment inercije:

$$I = I_s + I_u = \frac{1}{3} ml^2 + Ml^2 = \left( \frac{m}{3} + M \right) l^2 \quad 2 \text{ boda}$$

Period je konačno:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M}{\frac{g}{l} \left( \frac{m}{2} + M \right) + \frac{8}{9} k}}$$

$$T = 0.497 \text{ s} \quad 1 \text{ bod}$$

- b) Ako je  $\theta = 0^\circ$  u ravnotežnom položaju, u početnom trenutku štapove smo otklonili za:

$$\theta(t = 0) = \theta_0$$

Štapovi se harmonijski njišu s pomakom u fazi  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , pa su im položaji i kružne brzine:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_0 \cos \omega t$$

$$v_\theta(t) = \omega \theta_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega \theta_0 \sin \omega t \quad 1 \text{ bod}$$

Štap postiže maksimalnu brzinu kada prolazi kroz ravnotežni položaj:

$$v_{\theta \max} = \omega \theta_0 \quad 1 \text{ bod}$$

U kratkom vremenu  $\Delta t$  oko ravnotežnog položaja površina petlje će se smanjiti/povećati za kružni isječak kojega prebriše  $2/3$  duljine štapa (jer se tu nalazi električni spoj preko opruge), a u tom kratkom vremenu možemo uzeti da je kružna brzina konstantna. U vremenu  $\Delta t$  štap prevali kut  $\Delta \theta$ :

$$v_{\theta \max} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad 0.5 \text{ boda}$$

Prebrisana površina kružnog isječka iznosi:

$$\frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{\Delta S}{\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \pi}$$

Tražena površina kružnog isječka iznosi:

$$\Delta S = \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \pi \cdot \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{2}{9} l^2 v_{\theta \max} \cdot \Delta t \quad 1 \text{ bod}$$

Inducirani napon iznosi:

$$|U_i| = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Magnetsko se polje ne mijenja, pa je promjena magnetskog toka:

$$\Delta \Phi = B \cdot 2\Delta S \quad 1 \text{ bod}$$

jer se površina petlje mijenja gibanjem obaju štapova.

Konačno za maksimalni inducirani napon dobijemo:

$$\begin{aligned} |U_{i \max}| &= \frac{B \cdot 2\Delta S}{\Delta t} = \frac{2B}{\Delta t} \cdot \frac{2}{9} l^2 v_{\theta \max} \cdot \Delta t \\ |U_{i \max}| &= \frac{4}{9} B l^2 v_{\theta \max} = \frac{4}{9} B l^2 \theta_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \\ |U_{i \max}| &= \frac{8\pi B l^2 \theta_0}{9T} \quad 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

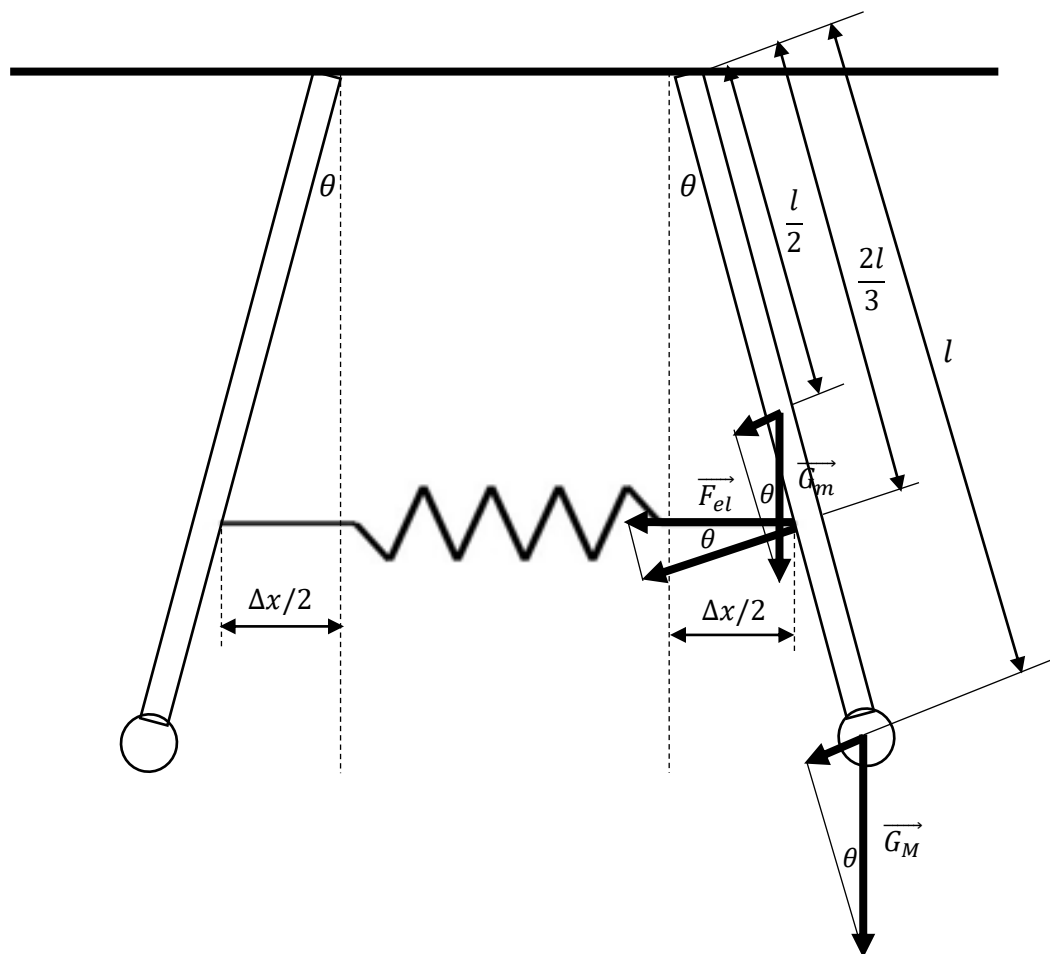
Maksimalno inducirana struja je:

$$I_{i \max} = \frac{|U_{i \max}|}{R} = \frac{8\pi B l^2 \theta_0}{9TR}$$

Ako računamo kut  $\theta_0$  u stupnjevima:

$$I_{i \max} = \frac{8\pi^2 B l^2 \theta_0}{9TR \cdot 180}$$

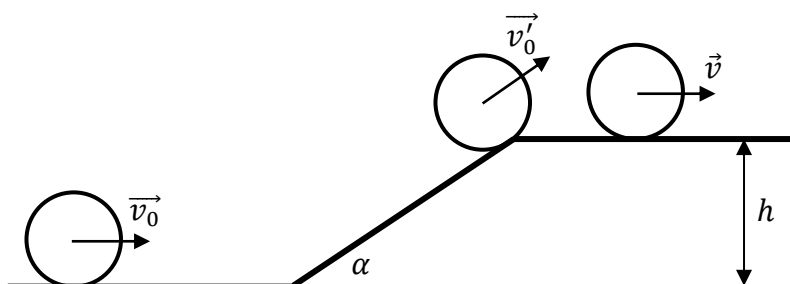
$$I_{i \max} = 0.07845 \text{ A} \quad 1 \text{ bod}$$



**Zadatak 4. (16 bodova)**

Homogeni puni valjak mase  $m = 100 \text{ g}$  i radijusa  $R = 20 \text{ cm}$  kotrlja se bez proklizavanja uz kosinu nagnutu za  $\alpha = 30^\circ$  u odnosu na horizontalnu ravninu. Kosina je visoka  $h = 50 \text{ cm}$  (vidi sliku).

- Koliko iznosi minimalna početna brzina  $v_0$  koju valjak mora imati da bi se popeo do vrha kosine?
- Koliko iznosi maksimalna početna brzina  $v_0$  koju valjak smije imati, a da još uvijek ne poskoči na vrhu kosine?
- Koliko iznosi maksimalna brzina  $v'_0$  koju valjak smije imati neposredno prije nego što se poravna s horizontalnom podlogom vrha kosine, a da još uvijek ne poskoči?

**Rješenje:**

- Minimalnu početnu brzinu  $v_0$  potrebnu da se valjak polumjera  $R$  kotrljanjem uspne na vrh kosine visine  $h$  odredimo iz zakona očuvanja energije. Na dnu kosine valjak ima:

- rotacijsku kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 \quad 1 \text{ bod}$$

- translacijsku kinetičku energiju:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \quad 0.5 \text{ boda}$$

Na vrhu kosine, valjak miruje i posjeduje samo gravitacijsku potencijalnu energiju:

$$mgh \quad 0.5 \text{ boda}$$

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2} I \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

$$\frac{1}{4} m v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

Minimalna početna brzina valjka da bi se popeo na vrh kosine

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

$$v_0 = 2.557 \text{ m/s}$$

1 bod

- c) Valjak na vrhu kosine mora poravnati svoje težište i smjer gibanja, koje je paralelno s pravcem kosine (položaj 1 na donjoj slici) u smjeru pravca horizontalne ravnine (položaj 2 na donjoj slici), što znači da će mu se smjer gibanja promijeniti. Valjak izvodi kružno gibanje oko točke O na vrhu kosine (vidi sliku). Primijetite da se težište valjka u položaju 2 pri završetku kružnog gibanja valjka oko točke O mora podići u odnosu na težište valjka u položaju 1 na početku kružnog gibanja. Iz tog će razloga brzina  $v'_0$  biti veća i različita od brzine  $v$ , pa će se i centripetalna sila mijenjati. 1 bod

Valjak neće poskočiti ako je sila pritiska na podlogu tijekom rotacije valjka oko točke O uvijek jednaka ili veća od nule. Pri tome je dovoljno promatrati valjak u položaju 1 jer je tada brzina najveća. Centripetalna sila u tom je slučaju: 1 bod

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv_0'^2}{R}$$

$$v_0'^2 = gR \cos \alpha - \frac{NR}{m}$$

2 boda

Do odskakivanja neće doći kada je  $N \geq 0$ , odnosno ako je brzina valjka u položaju 1: 1 bod

$$v'_0 \leq \sqrt{gR \cos \alpha}$$

$$v'_0 \leq 1.304 \text{ m/s}$$

1 bod

#### NAPOMENA:

Ako promatramo položaj 2 na kraju rotacije na vrhu kosine, kada je smjer gibanja valjka poravnat sa smjerom horizontalne ravnine, centripetalna sila iznositi će:

$$mg - N = \frac{mv^2}{R}$$

$$v^2 = gR - \frac{NR}{m}$$

Pritisak na podlogu bit će veći ili jednak nuli  $N \geq 0$  (valjak se neće odvojiti od podloge) ako je brzina valjka na vrhu kosine

$$v \leq \sqrt{gR}$$

Možemo izračunati brzinu  $v'_0$  u tom slučaju (označimo je s  $v'_0(2)$ ) te pokazati da je ta brzina prevelika da bi valjak ostao u kontaktu s podlogom u položaju 1, zbog čega će valjak poskočiti.

Prilikom promjene smjera gibanja valjka iz smjera kosine u smjer horizontalne ravnine, težište valjka promijeni se i povisi za (vidi sliku):

$$\Delta h = R(1 - \cos \alpha)$$

Brzina valjka nakon poravnanja sa smjerom horizontalne ravnine mora se smanjiti u odnosu na brzinu dok je smjer gibanja valjka paralelan sa smjerom kosine kako bi se težište podiglo za  $\Delta h$ .

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v'_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0'^2 = mg\Delta h + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{3}{4}mv_0'^2 = mg\Delta h + \frac{3}{4}mv^2$$

$$\frac{3}{4}v_0'^2 = gR(1 - \cos \alpha) + \frac{3}{4}v^2$$

Konačno, brzina  $v'_0$  i brzina  $v$  na vrhu kosine povezani su kao:

$$v_0'^2 = \frac{4}{3}gR(1 - \cos \alpha) + v^2$$

Ako vrijedi da je brzina na vrhu kosine:

$$v \leq \sqrt{gR}$$

konačno dobijemo za brzinu  $v'_0$ :

$$v_0'^2 \leq \frac{4}{3}gR(1 - \cos \alpha) + gR$$

$$v'_0 \leq \sqrt{\frac{gR(7 - 4 \cos \alpha)}{3}}$$

$$v'_0(2) \leq 1.521 \text{ m/s}$$

Vidimo da su granične vrijednosti brzina  $v'_0(2) > v'_0$ , pa će stoga doći do poskakivanja valjka između položaja 1 i 2 ako je  $1.304 \text{ m/s} < v'_0 \leq 1.521 \text{ m/s}$ , te je dovoljno promatrati položaj 1, a do poskakivanja neće doći ako je brzina

$$v'_0 \leq 1.304 \text{ m/s}$$

- b) Prilikom promjene smjera gibanja valjka iz smjera kosine u smjer horizontalne ravnine, težište valjka promijeni se iz položaja 1 u 2 i povisi za (vidi sliku):

$$\Delta h = R(1 - \cos \alpha)$$

iz čega je vidljivo da se valjak u položaju 1 s brzinom  $v'_0$  podignuo za visinu  $h - \Delta h$  s obzirom na valjak na dnu kosine s traženom brzinom  $v_0$ . 1 bod

Iz zakona očuvanja energije odredimo najveću početnu brzinu  $v_0$  za uvjet brzine  $v'_0$  pri kojemu nema poskakivanja valjka:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h - \Delta h) + \frac{1}{2}I\left(\frac{v'_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0'^2 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h - \Delta h) + \frac{1}{4}mv_0'^2 + \frac{1}{2}mv_0'^2$$

$$\frac{3}{4}v_0^2 = g(h - \Delta h) + \frac{3}{4}v_0'^2$$

$$v_0^2 = v_0'^2 + \frac{4}{3}g(h - \Delta h)$$

$$v_0 = \sqrt{v_0'^2 + \frac{4}{3}g(h - R(1 - \cos \alpha))} \quad 1 \text{ bod}$$

Uvjet prema kojemu nema poskakivanja valjka:

$$v'_0 \leq \sqrt{gR \cos \alpha}$$

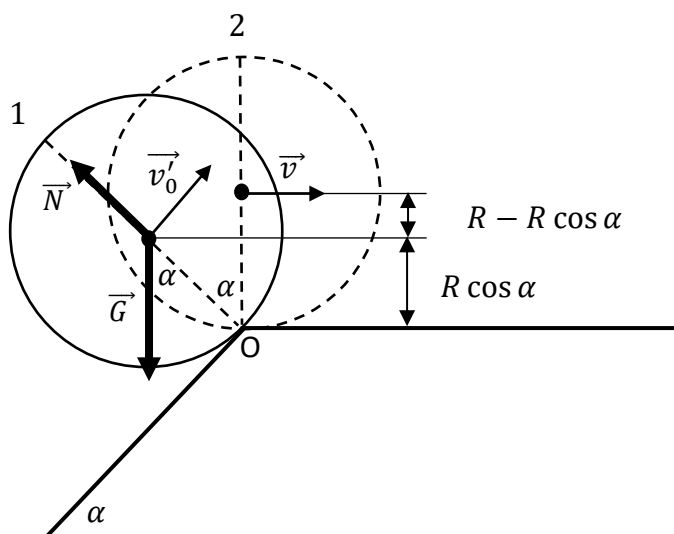
1 bod

$$v_0 \leq \sqrt{gR \cos \alpha + \frac{4}{3}g(h - R(1 - \cos \alpha))}$$

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{g}{3}(7R \cos \alpha + 4h - 4R)}$$

$$v_0 \leq 2.809 \text{ m/s}$$

1 bod



**Konstante:**

$$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$$

**Moment tromosti štapa** mase  $m$ , duljine  $l$  i zanemarive debljine pri rotaciji oko jednog od krajeva štapa:

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

**Moment tromosti točke** mase  $m$  pri rotaciji oko osi udaljene za  $r$  od točke:

$$I = mr^2$$

**Moment tromosti homogenog punog valjka** mase  $m$  i polumjera  $R$  pri rotaciji oko glavne (središnje) osi:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$